

Relatività speciale - Paradosso del garage

La *relatività speciale* di Einstein ([Einstein, 1905]) prevede che un corpo a riposo in un sistema $\tilde{S}$, in movimento con velocità costante v rispetto a un altro sistema S , subisca rispetto a S una contrazione della propria lunghezza a riposo lungo la direzione del moto pari a $\tilde{x} = x / \gamma$, dove $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ è il fattore di Lorentz (e c è la velocità della luce).

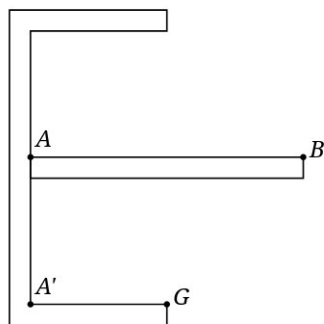
Considerando la contrazione della lunghezza, si ricava il famoso *paradosso del garage*:

Si consideri (*Figura 1*) un garage di lunghezza a riposo $x_g = \overline{A'G}$ e una sbarra (che semplifica un'auto) di lunghezza a riposo $x_s = \overline{AB} = 2x_g$.

Se immaginiamo che la sbarra viaggi a velocità $v = \sqrt{3}/2 c$ (quindi $\gamma = 2$) rispetto al garage a riposo, a seguito della contrazione essa *potrà* entrare nel garage a riposo, visto che $\tilde{x}_s = x_s/2 = x_g$. MA se immaginiamo invece la barra a riposo e il garage in movimento con la stessa velocità, la sbarra *non potrà* più entrare perché la lunghezza del garage sarà $\tilde{x}_g = x_g/2 = 1/4 x_s$.

Chiaramente le due interpretazioni *devono* coincidere, quindi c'è un punto fallace nel paradosso: infatti nella *relatività speciale* è errato considerare solo la contrazione della lunghezza e non anche la dilatazione del tempo, ovvero nello spaziotempo quadridimensionale è necessario considerare *eventi* (x_i, t) e non singole coordinate.

Figura 1



Soluzione del paradosso

Si ricordano le trasformazioni di Lorentz generiche tra le coordinate di *eventi* nei due sistemi inerziali S e $\tilde{S}$ considerati:

$$x = \gamma (\tilde{x} + v \tilde{t}) \quad [1]$$

$$\tilde{x} = \gamma (x - v t) \quad [2]$$

Si consideri:

$$\text{in } S \text{ la sbarra ferma,} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_A = 0 = \tilde{x}_A \\ t_A = 0 = \tilde{t}_A \end{cases}$$

$$\text{in } \tilde{S} \text{ il garage mobile, con} \quad v = \sqrt{3}/2 \, c, \quad \gamma = 2,$$

$$\text{quindi per l'evento } G \text{ vale} \quad \begin{cases} \tilde{x}_g = x_s/2 \\ \tilde{t}_g \geq \tilde{x}_g / c = x_s / 2c \end{cases},$$

perché c è la velocità massima di propagazione di un segnale (ad esempio del fatto che l'estremo A della sbarra sia arrivato al fondo del garage).

Applicando la [1]:

$$\Rightarrow \quad x_g = \gamma (\tilde{x}_g + v \tilde{t}_g) \geq 2 \left(\frac{x_s}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c \frac{x_s}{2c} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} x_s = 1.866 x_s,$$

quindi la sbarra sta nel garage in movimento almeno 1.866 volte o più, in base al tempo di propagazione della perturbazione, valutando le coordinate del garage in movimento in $\tilde{S}$ dal sistema di riferimento S della sbarra ferma.

Per verifica, dal punto di vista dell'evento B , dato che $t_B \geq x_s / c$ per il limite della velocità c di propagazione del segnale, applicando la [2]:

$$\Rightarrow \quad \tilde{x}_s = \gamma (x_s - v t_B) \leq 2 \left(x_s - \frac{\sqrt{3}}{2} c \frac{x_s}{c} \right) = (2 - \sqrt{3}) x_s = 0.2679 x_s,$$

quindi si conferma che la sbarra stia comoda nel garage con lunghezza $x_g = 0.5 x_s$ almeno 1.866 volte o più, in base al tempo di propagazione della perturbazione, valutando le coordinate della sbarra ferma in S dal sistema di riferimento $\tilde{S}$ del garage in movimento.

Reference

Einstein, 1095 - Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Annalen der Physik, vol. 322, Issue 10, pp.891-921, 1905)