

II teorema del viriale e l'equilibrio stellare

Il teorema del viriale costituisce un risultato analitico di fondamentale importanza nella meccanica dei sistemi di particelle, poiché stabilisce una connessione rigorosa tra le medie temporali delle energie cinetica e potenziale. La sua validità si estende a sistemi in equilibrio dinamico, dove le forze interne sono regolate da potenziali che dipendono dalla distanza secondo una legge di potenza, come nel caso della gravitazione universale o dell'elettrostatica.

La dimostrazione del teorema si basa su una grandezza scalare definita come il prodotto scalare tra il vettore posizione e il vettore quantità di moto di ogni singola particella, esteso a tutto il sistema:

$$\Phi = \sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i . \quad [1]$$

Se si analizza la variazione temporale della [1], la derivata rispetto al tempo, si ottiene una espressione che descrive la dinamica interna del sistema:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{p}_i + \vec{r}_i \cdot \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) . \quad [2]$$

La [2] può essere riscritta, applicando le leggi di Newton e la definizione di energia cinetica, come:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2K + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i . \quad [3]$$

Ovvero la variazione di Φ è pari al doppio dell'energia cinetica totale più il prodotto tra i vettori posizione e le forze agenti sulle particelle, detto *viriale di Clausius*.

Il focus del teorema è nella stabilità del sistema: se quest'ultimo è limitato nello spazio e le velocità non divergono, la media temporale della derivata di Φ su un intervallo di tempo sufficientemente ampio tende a zero. Quindi questa condizione di stabilità implica che mediamente l'energia cinetica e il viriale delle forze debbano bilanciarsi.

Nel caso in cui le forze agenti siano di natura conservativa e derivino da un potenziale gravitazionale $\langle U \rangle$, il termine relativo alle forze si riduce all'energia potenziale stessa, per le proprietà di omogeneità del potenziale.

Possiamo quindi scrivere dalla [3] la relazione direttamente legata al teorema:

$$\boxed{2\langle K \rangle + \langle U \rangle = 0} \quad [4]$$

Dalla [4] si può concludere che l'energia totale di un sistema legato, definita come:

$$E = \langle K \rangle + \langle U \rangle , \quad [5]$$

risulta pari a $-\langle K \rangle$.

Questo risultato implica la notevole conseguenza termodinamica che i sistemi autogravitanti possiedano un *calore specifico negativo*.

In termini fisici, questo significa che una graduale perdita di energia totale del sistema, dovuta ad esempio all'irraggiamento, comporti paradossalmente un aumento dell'energia cinetica media e, di conseguenza, della temperatura interna del sistema stesso.

Nel caso di un equilibrio stellare, la perdita di energia per irraggiamento fa reagire il sistema gravitazionalmente contraendosi (ovvero la sua energia potenziale diventa più negativa). Quindi se metà dell'energia viene irradiata, un'altra metà viene trasformata in calore, quindi la stella, perdendo energia, diventa più calda.

Limiti di stabilità nel caso stellare

Esprimendo il teorema del viriale per il caso generale di una sfera di gas, la [4] diventa:

$$3 \int_V P dV + U = 0 . \quad [6]$$

Ipotizzando un indice adiabatico costante, l'energia interna totale è legata alla pressione dalla relazione:

$$E_{int} = \frac{PV}{\gamma - 1} \quad [7]$$

e sostituendo la [7] nella [6] si ottiene la condizione di equilibrio:

$$3(\gamma - 1) E_{int} + U = 0 . \quad [8]$$

Quindi dalla [8] si può esprimere l'energia totale del sistema [5] interamente in funzione dell'energia potenziale e dell'indice adiabatico:

$$E = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} U . \quad [8]$$

Sulla base di questa relazione fondamentale è possibile valutare la stabilità dinamica della stella. Poiché l'energia potenziale gravitazionale U è sempre negativa, il segno dell'energia totale dipende esclusivamente dal numeratore nella [8] :

- se $\gamma > 4/3$: l'energia totale è negativa; il sistema è legato e stabile; se la stella dovesse subire una piccola contrazione, la pressione interna aumenterebbe più velocemente della forza di gravità, spingendo il sistema all'equilibrio.
- se $\gamma = 4/3$: l'energia totale è nulla; il sistema è in uno stato di equilibrio indifferente precario; una minima perturbazione può portare il sistema al collasso o alla disgregazione senza che ci sia una forza riequilibratrice efficace.
- se $\gamma < 4/3$: l'energia totale è positiva; la pressione non è sufficiente durante una contrazione per contrastare l'aumento di gravità e il collasso diventa inevitabile.

Casi di instabilità

Si possono realizzare diverse circostanze fisiche nelle quali l'indice adiabatico può avvicinarsi al (diminuire verso il) valore critico $4/3$ alterando l'equilibrio della stella:

- Pressione di radiazione dominante: nelle stelle estremamente massicce, la pressione è esercitata principalmente dai fotoni anziché dal gas, e poiché per la radiazione si ha $\gamma = 4/3$, ciò rende queste stelle intrinsecamente instabili e soggette a forti pulsazioni.
- Implicazioni relativistiche: quando le particelle diventano relativistiche (con accelerate a velocità confrontabili con quella della luce, come gli elettroni in una nana bianca o in un nucleo stellare collassante), il loro indice adiabatico scende da $5/3$ verso $4/3$. Una conseguenza è il limite di Chandrasekhar: oltre una certa massa, la pressione degli elettroni non riesce più ad opporsi alla gravità.
- Processi di dissociazione o ionizzazione: se l'energia termica viene spesa per ionizzare l'idrogeno (liberarne gli elettroni) o scindere i nuclei (fotodisintegrazione), l'aumento della pressione viene mitigato, facendo scendere γ sotto la soglia critica e innescando il collasso (come avviene nelle supernova a collasso nucleare).