

Funzione di distribuzione dei fotoni

La funzione di distribuzione dei fotoni¹, ovvero il modo in cui sono distribuiti in direzione e in energia, si ricava partendo dal *numero di occupazione* $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$, che fissa il numero medio di particelle che in un certo istante sono contenute in una cella di volume h^3 dello spazio delle fasi² $\mathcal{F}[\vec{x}, \vec{p}]$.

La densità degli stati dei fotoni viene scritta nella forma:

$$\frac{d^2 N}{(d^3 x)(d^3 p)} = \frac{2}{h^3} f(\vec{x}, \vec{p}, t) , \quad [1]$$

dove il fattore 2 tiene conto dei 2 possibili stati di polarizzazione.

La densità differenziale dei fotoni che si propagano all'interno dell'angolo solido $d\Omega$ centrato nella direzione di propagazione $\vec{k}$ della particella, che hanno momento $p^i = [p/c, \vec{p}] = h\nu/c [1, \vec{k}]$ ed energia nell'intervallo $h d\nu$, è quindi data da:

$$d^2 n_\nu = \frac{2}{h^3} f(\vec{p}) p^2 dp d\Omega = \frac{2}{c^3} f(\vec{k}, \nu) \nu^2 d\nu d\Omega , \quad [2]$$

omettendo la dipendenza dalle coordinate x^i .

Diversamente dai fermioni, sottoposti al principio di esclusione di Pauli, il numero di occupazione dei bosoni non è limitato superiormente poiché più particelle possono occupare il medesimo stato.

Integrando la [2] nelle direzioni spaziali e in energia si ottiene la densità totale:

$$n = \frac{2}{c^3} \int \nu^2 d\nu \int f(\vec{k}, \nu) d\Omega \quad [3a]$$

e integrando sulla sfera unitaria per una radiazione isotropa si ottiene:

$$n = \frac{8\pi}{c^3} \int \nu^2 f(\nu) . \quad [3b]$$

Poiché ogni fotone trasporta un'energia $h\nu$, moltiplicandola per la densità differenziale [2] si ottiene la densità di energia dei fotoni che si propagano nell'angolo solido $d\Omega$, con frequenza nell'intervallo $d\nu$:

$$d^2 u_\nu = h\nu d^2 n_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^3} f(\vec{k}, \nu) d\nu d\Omega . \quad [4]$$

¹ Per la teoria sulla radiazione si fa riferimento a [Rybicki e Lightman, 1979] e ad altri 'standard textbook'

² Queste congetture non tengono conto dell'estensione spaziale dei singoli fotoni, considerati puntiformi

Integrando infine la [4] si ottiene la densità totale di energia del campo radiativo³ :

$$u = \frac{2h}{c^3} \int v^3 dv \int f(\vec{k}, v) d\Omega \quad [5a]$$

e integrando sulla sfera unitaria per una radiazione isotropa si ottiene:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty v^3 f(v) dv . \quad [5b]$$

Quindi in un campo isotropo l'energia media dei fotoni è data dal rapporto:

$$\langle h\nu \rangle = \frac{u}{n} = \frac{\int h\nu^3 f(v) dv}{\int v^2 f(v) dv} .$$

Nel caso in cui il sistema si trovi in equilibrio termodinamico a una data temperatura, la meccanica statistica mostra che la distribuzione dei fotoni è isotropa e il numero di occupazione medio assume la forma di equilibrio:

$$f_{eq}(v) = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} . \quad [6]$$

Rispetto alla analoga relazione di equilibrio dei fermioni⁴, si osserva l'assenza del potenziale chimico μ , che infatti deve essere nullo, potendo i fotoni essere creati e distrutti, e affinché possano avere l'energia F minima all'equilibrio, una delle condizioni è $\partial F / \partial N = 0$ dove N è il numero di particelle, ma essendo $(\partial F / \partial N)_{T, V} = \mu$ si ricava che⁵ $\mu = 0$.

All'equilibrio i fotoni sono quindi ripartiti tra le frequenze secondo l'equazione:

$$\frac{dn^P}{dv} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{v^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} , \quad [7]$$

nota come *distribuzione di Planck* [Planck, 1900].

Analogamente, la distribuzione nello spettro dell'energia segue dalla [4] e all'equilibrio è data dalla *legge di corpo nero*, che rappresenta la densità di energia (secondo la distribuzione di Planck) espressa in frequenza del campo elettromagnetico:

$$u_v^P(T) = h\nu \frac{dn}{dv} = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} , \quad [8a]$$

che corrisponde all'energia emessa:

$$E_v^P(T) = \frac{u_v^P(T) c}{4} = \frac{2\pi h v^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} , \quad [8b]$$

³ Poiché la densità di energia non può divergere e gli integrali si devono mantenere finiti, è necessario che per $v \rightarrow \infty$ la funzione $v^3 f(v)$ tenda a zero più velocemente di v^{-1} ; formalmente, ponendo $\lim_{v \rightarrow \infty} f(v) \propto v^{-a}$ dovrà essere $a > 4$; analogamente nel caso $v \rightarrow 0$ ponendo $\lim_{v \rightarrow 0} f(v) \propto v^{-b}$ dovrà essere $b < 4$.

⁴ La relazione di equilibrio dei fermioni ha espressione $f_F = \frac{1}{e^{E - \mu/k_B T} + 1}$, dove μ è il potenziale chimico

⁵ [Landau e Lifšits, 1972] edizione italiana pag. 209

ovvero, dove $\nu = \frac{c}{\lambda}$ e $d\nu = \left| \frac{c}{\lambda^2} \right| d\lambda$, come densità di energia (secondo la distribuzione di Planck) espressa in lunghezza d'onda del campo elettromagnetico:

$$u_{\lambda}^P(T) = \frac{8\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k_B T\lambda} - 1} \quad [9a]$$

e come energia emessa:

$$E_{\lambda}^P(T) = \frac{u_{\lambda}^P(T) c}{4} = \frac{2\pi h c^3}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k_B T\lambda} - 1} . \quad [9b]$$

Con una congettura alternativa, secondo lo sviluppo dell'ipotesi originale di Plank l'energia associata ai modi oscillatori del campo elettromagnetico può assumere soltanto valori multipli del quanto fondamentale di energia $h\nu$, quindi la probabilità che ogni modo di oscillazione nella cavità di *corpo nero* abbia energia pari a $n h\nu$ (con $n=1,2,3,\dots$) è

$$P_{n\nu} = \frac{e^{-\frac{n h\nu}{k_B T}}}{\sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\frac{n' h\nu}{k_B T}}} . \text{ Nella funzione di partizione } z_{\nu}(T) = \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\frac{n' h\nu}{k_B T}} = z_{\nu}(\beta) = \sum_{n'=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^{n'} , \text{ dove}$$

$$\beta = 1/k_B T , \text{ si riconosce una serie geometrica con somma } z_{\nu}(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \quad (\text{dove}$$

$$e^{-\beta h\nu} < 1) , \text{ si determina l'energia media } \bar{E}_{\nu} = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\ln(z_{\nu}(\beta))] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right) = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

e calcolando il numero di modi ammessi nella cavità (parallelepipeda) di *corpo nero* come $n_{\nu} d\nu = \frac{4\pi}{c^3} L^3 \nu^2 d\nu$, considerando le 2 diverse polarizzazioni possibili per il campo

$$\text{elettromagnetico si ottiene la densità di energia } u_{\nu}^P(T) = \frac{n_{\nu} 2 \bar{E}_{\nu}}{L^3} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} , \text{ la}$$

stessa [8a] già ricavata nello spazio delle fasi.

Letteratura e Fonti

Landau e Lifšits, 1972 - Lev Landau e Evgenij Lifšits, *Fisica Teorica V, Fisica Statistica parte prima* (prima edizione Editori riuniti, 2010); edizione originale (Nauka, Mosca, 1972)

Planck, 1900 - Max Planck, *On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum*; traduzione inglese dell'originale *Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung*, (Deutsche Physikalische Gesellschaft, Verhandlungen 2 pag. 237-245, 1900)

Rybicki e Lightman, 1979 - George Rybicki e Alan Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (Wiley and Sons, Inc, 1979)