

L'originale dimostrazione di Richard Feynman della prima legge di Kepler

Una preliminare introduzione storica è opportuna per contestualizzare gli argomenti di questo approfondimento.

Nel 1609 Johannes Kepler (1571-1630) pubblicò il trattato *Astronomia nova*, nel quale enunciava le prime due leggi sul moto dei pianeti, sulla base delle ottime osservazioni dell'astronomo danese Tycho Brahe (1546-1601) soprattutto di Marte (che ha un'orbita particolarmente eccentrica), osservazioni che evidenziavano la variazione del periodo sinodico (tempo trascorso tra due identiche posizioni del pianeta e della Terra rispetto al Sole, ad esempio tra due opposizioni o due congiunzioni), mettendo in crisi il presupposto delle orbite circolari dei pianeti¹.

Fino ad allora la concezione eliocentrica ipotizzata nel *De revolutionibus*, pubblicato nel 1543 da Niccolò Copernico (1473-1543), era oggetto di discussione (non potendo essere confermata da osservazioni sufficientemente precise) in quanto alternativa alla concezione di Claudio Tolomeo (II secolo d.C.) che poneva la Terra al centro dell'universo. La teoria di Copernico risolveva peraltro in modo efficace il problema dell'equante (introdotto da Tolomeo per correggere i moti degli epicicli lungo il deferente e descrivere i moti reali dei pianeti), che non seguiva un moto circolare uniforme (una sorta di tradimento al principio di purezza del moto)².

Inizialmente Kepler considerò le misurazioni eseguite nei momenti di opposizione di Marte (almeno tre, per poter definire la curva dell'orbita) nel quale pianeta, Terra e Sole fossero allineati, di fatto rendendo indifferente il presupposto che fosse la Terra oppure il Sole a muoversi o a stare al centro, tenendo presente che in entrambe le concezioni l'irregolarità del periodo sinodico poteva essere giustificata ipotizzando che il Sole o la Terra fossero leggermente scostati dal centro dell'orbita (quindi non schierandosi apertamente per una delle due teorie; era piuttosto pericoloso contrariare la Chiesa cattolica, come testimoniava la condanna al rogo del libero pensatore Giordano Bruno, 1548-1600, da parte del Tribunale dell'Inquisizione).

Kepler aveva a disposizione cinque osservazioni di Brahe a distanza di un periodo siderale, che utilizzò per la sua seconda legge³ (la "legge delle aree"); egli enunciò la terza legge dieci anni più tardi nella pubblicazione *Harmonices Mundi*, guidato nella ricerca dell'armonia

¹ Max Kaspar, *Kepler*, Dover Publications, New York 1993, chapter III.3, ebook edition pp. 108-110

² Owen Gingerich, *Alla ricerca del libro perduto*, Rizzoli, Milano 2004, pp. 77-83

³ Francesco Zagar, *Astronomia sferica e teorica*, Zanichelli Editore, Bologna 1948, pp. 287-289

nell'astronomia come ne vedeva nella geometria e nella musica⁴. L'idea dell'armonia risaliva a Platone (428-348 a.C.) e fu esplicitata da Plinio il Vecchio (I secolo d.C.) come scala musicale⁵, Kepler però poté associare le proporzioni delle note della scala musicale alle proporzioni del sistema planetario, disponendo di misurazioni che effettivamente mostravano coerenza con gli intervalli considerati⁶.

Le prime due leggi di Kepler descrivono il moto di un singolo pianeta nella propria orbita, la terza confronta le orbite dei pianeti e le mette in relazione:

- . I legge: le orbite di tutti i pianeti sono ellissi e il Sole occupa uno dei fuochi
- . II legge: il raggio vettore che unisce il Sole al pianeta descrive aree uguali in tempi uguali (conservazione del momento angolare, determinata dalla forza centripeta gravitazionale⁷)
- . III legge: il rapporto tra il quadrato del tempo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è lo stesso per tutti i pianeti.

Ai tempi di Kepler gli sforzi degli astronomi erano tesi alla misurazione e alla descrizione dei moti dei pianeti, più che alla ricerca delle loro cause; nel merito è interessante la posizione di Michael Maestlin (1550-1631), astronomo maestro del giovane Kepler, che così lo redarguiva: «Penso che sarebbe opportuno lasciar da parte le cause fisiche e spiegare invece i fenomeni astronomici basandosi solo sul metodo astronomico, ossia ricorrendo a cause e ipotesi astronomiche, non fisiche. In altri termini, i calcoli richiedono basi astronomiche nel campo della geometria e dell'aritmetica.»⁸

Kepler attribuiva infatti la maggior velocità dei pianeti interni alla maggior vicinanza dell'«energia motrice» del Sole, e in *Astronomia nova* scrisse: «I motori che sono propri dei pianeti appaiono in tal modo essere, con ogni probabilità, affezioni degli stessi corpi planetari, simili a quell'affezione che è nel magnete che tende verso il polo e attrae il ferro. In tal modo tutto il sistema dei movimenti celesti è governato da facoltà meramente corporee, ossia magnetiche. Fa eccezione solo la rotazione locale del corpo del Sole, per spiegare la quale sembra sia necessaria la forza proveniente da un'anima.»⁹

⁴ Kepler, op.cit., pp. 231-236

⁵ J.L.E.Dreyer, *A history of astronomy from Thales to Kepler*, Dover Publications, USA, 1953, pp. 178-180

⁶ *A history of astronomy from Thales to Kepler*, op.cit., alle pagine 405-410 l'autore riporta gli spartiti musicali associati ai pianeti e spiega le proporzioni individuate da Kepler

⁷ Antonio Rostagni, *Fisica generale*, volume primo, Unione tipografica editrice udinese, Torino 1973, pp. 167-170, nelle quali si dimostra la legge di conservazione ed è esplicitamente richiamata la seconda legge di Kepler come formulazione analoga

⁸ Citazione da *Alla ricerca del libro perduto*, op.cit., p. 227

⁹ Citazione da *Astronomia nova* in Paolo Rossi (a cura di), *La rivoluzione scientifica: da Copernico a Newton*, Loescher, Torino 1981, pp. 165-166

Le meticolose attività di misura sono sicuramente testimoniate dalle accurate e continuative osservazioni di Brahe (non solo di Marte ma anche delle comete e della supernova del 1572) e anche dallo stesso *Sidereus nuncius*¹⁰ di Galileo Galilei (1564-1642), pubblicato nel 1610 subito dopo *Astronomia nova*. Si trattò di un cambio di approccio fondamentale per quella che diventerà la 'ricerca scientifica', superando le esistenti impostazioni assiomatiche risalenti ad Aristotele (IV secolo a.C.) e di fatto 'spegnendo' la filosofia naturale aristotelica che non poté essere riformata, non potendo spiegare e prevedere i fenomeni come invece faceva la nuova fisica matematica¹¹.

Merita ricordare come il *Sidereus nuncius* divenne immediatamente un 'best-seller' in tutta Europa, e anche se Galilei non si pronunciò mai direttamente contro le posizioni geocentriche, sicuramente le mise enormemente in discussione con osservazioni ripetibili da chiunque (ad esempio per le fasi di Venere), giungendo ad affermare come le sue osservazioni fossero «tante et di sì gran conseguenze, che tra qu[ello] che aggiungano et quello che rimutano per necessità nella scie[nza] de i moti celesti, posso dire che in gran parte sia rinnovata et tratta fuori delle tenebre, come finalmente sono per confessare tutti gl'intendenti.»¹²

Fu Isaac Newton (1643-1727) nella pubblicazione *Principia matematica* del 1687, definite le tre leggi della dinamica e il concetto di forza, a dimostrare:

- . con le proposizioni I e II, che l'esistenza di una forza diretta verso il centro derivasse dalla seconda legge di Kepler¹³
- . in modo puramente geometrico, utilizzando le proprietà dei triangoli, la terza legge di Kepler (per le orbite circolari)¹⁴
- . in modo impreciso (nella prima edizione dei *Principia matematica*) il legame tra l'orbita ellittica (prima legge di Kepler) e la forza centrale legata al quadrato della distanza, ovvero non dimostrando che l'orbita ellittica fosse l'unica possibile ma che essendo ellittica veniva confermata la legge di gravitazione universale¹⁵. La dimostrazione fu completata solo con interventi successivi¹⁶.

L'insieme di queste equivalenze dimostrava la validità delle leggi della dinamica.

¹⁰ Galileo Galilei, *Sidereus Nuncius*, Letteratura universale Marsilio, a cura di Andrea Battistini, Venezia 1993; è da notare l'impostazione di oggettiva e analitica struttura diaristica delle scoperte riportate da Galilei

¹¹ Edward Grant, *Le origini medievali della scienza moderna*, Einaudi editore, Torino 2001, pp 249-250

¹² Galileo Galilei, *Le opere*, Volume XI. Carteggio 1611-1613, G. Barbèra editore, Firenze 1966, ebook p. 21

¹³ Isaac Newton, *Principi matematici della filosofia naturale*, Piccola Biblioteca Einaudi, a cura di Franco Giudice, Torino 2018, p. 55-58

¹⁴ Piergiorgio Odifreddi, *Sulle spalle di un gigante*, Longanesi, Milano 2014, pp. 165-166

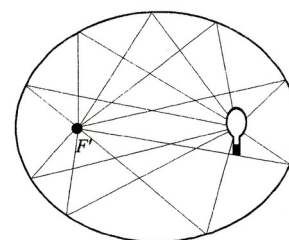
¹⁵ *Sulle spalle di un gigante*, op.cit., pp. 167-173

¹⁶ *Sulle spalle di un gigante*, op.cit., pp. 177-180

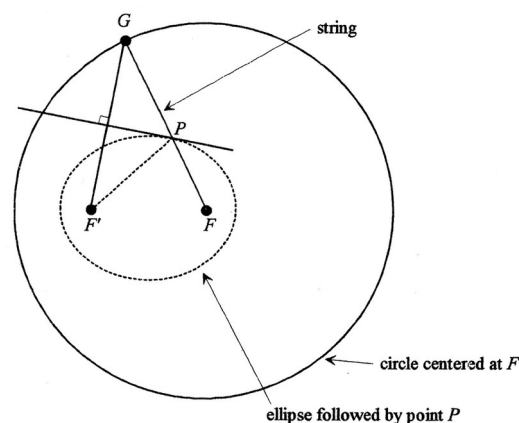
Quasi tre secoli dopo, nel marzo del 1964, Richard Feynman (1918-1988) tenne alcune lezioni alla Caltech University presentando una personale dimostrazione delle leggi di Kepler, in particolare della prima sulle orbite ellittiche, utilizzando nozioni geometriche elementari; la documentazione di queste lezioni si era perduta, finché la competenza e la passione di David Goodstein, collega e amico di Feynman, hanno potuto ricostruirla e pubblicarla in *Feynman's lost lecture*¹⁷, nel 1997.

Questa dimostrazione è l'oggetto del presente approfondimento, che ha lo scopo di delineare la strategia dimostrativa di Feynman (non i dettagli delle dimostrazioni).

Feynman utilizza una proprietà notevole delle ellissi (luogo geometrico dei punti di un piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi): se una sorgente luminosa fosse accesa in uno dei fuochi e la superficie interna dell'ellisse fosse riflettente come uno specchio, tutti i raggi riflessi andrebbero all'altro fuoco. Questa proprietà viene ingegnosamente dimostrata con un metodo tipico dell'approccio di Feynman all'elettrodinamica quantistica¹⁸, provando che il percorso più breve dal primo fuoco alla retta tangente (in un punto P dell'ellisse), quindi all'altro fuoco, è il percorso che riflette la luce nel punto P (un caso particolare del "principio del minimo tempo" di Fermat). Nel merito sono assai interessanti le lezioni tenute da Feynman alla University of California di Los Angeles e raccolte in *QED*¹⁹, una pubblicazione a scopo divulgativo.



Omettendo la dimostrazione di Feynman di questa proprietà dell'ellisse, è necessario però notare come nello sviluppo della dimostrazione si arrivi, per costruzione, ad individuare una struttura geometrica nella quale la normale alla tangente in un punto P dell'ellisse, condotta dal fuoco F' , sia bisettrice del segmento $F'G$ che unisce tale



¹⁷ David and Judith Goodstein, *Feynman's lost lecture – The motion of the planets around the sun*, Vintage Science, London 1997; le figure riportate sono tratte da questo libro

¹⁸ *Feynman's lost lecture*, op.cit., pagina 83, opinione di David Goodstein

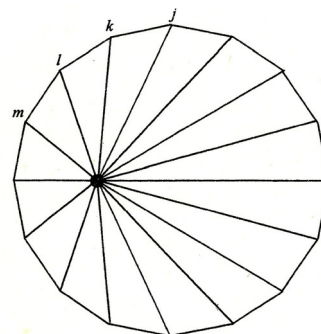
¹⁹ Richard Feynman, *QED - La strana teoria della luce e della materia*, Adelphi edizioni, Milano 1989, cap. II, alle pp. 55-70 la descrizione dei principi fisici dei quanti di luce per capire il "principio del minimo tempo"

fuoco all'intersezione del prolungamento di FP con la normale stessa, e le distanze FPG e FPF' siano uguali; in definitiva come, al variare di P lungo l'ellisse, G descriva una circonferenza di centro F .

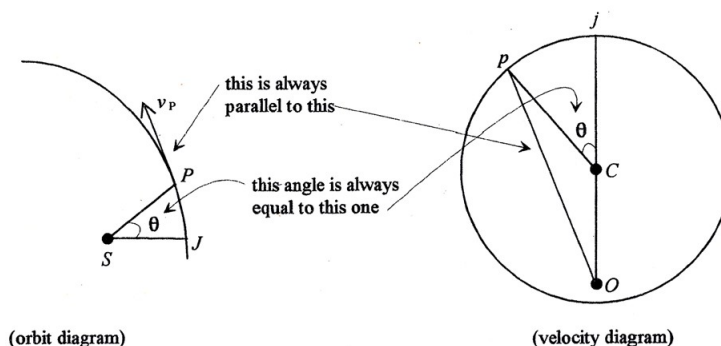
Tenendo presente che dalla seconda legge di Kepler consegue che un pianeta si muove più velocemente nella sua orbita quando è più vicino al Sole, Feynman considera nell'orbita angoli uguali (piuttosto che aree uguali, come fece Newton nella sua dimostrazione), osservando che gli intervalli di tempo Δt sono proporzionali alle aree descritte ma anche ai quadrati della distanza dal Sole, ovvero $\Delta t \propto R^2$, dove R è la distanza dal Sole (questa relazione è dimostrata geometricamente da Goodstein perché omessa da Feynman nella sua lezione). Ricordando che la forza di attrazione decresce con l'inverso del quadrato della distanza, quindi $F \propto 1/R^2$, e che il cambio di velocità Δv verso il Sole (costruito per gli incrementi dell'orbita) è direttamente proporzionale alla forza stessa e all'intervallo di tempo Δt , potremo scrivere $\Delta v \propto F \Delta t$.

Dalle relazioni precedenti consegue $\Delta v \propto 1/R^2 \cdot R^2 = 1$ ovvero che la variazione di velocità non dipende dalla distanza dal Sole ma sarà uguale per angoli uguali.

Costruendo allora un diagramma delle velocità (analogo a quello utilizzato da Newton per gli spostamenti), si ottiene un poligono regolare che per angoli piccoli (e piccoli incrementi Δv) approssima una circonferenza: angoli e Δv sono uguali ma le velocità dall'origine (che non si trova al centro della circonferenza) a $j, k, l, m, \dots$ sono diverse, la maggiore di tutte corrisponderà al punto più vicino al Sole.

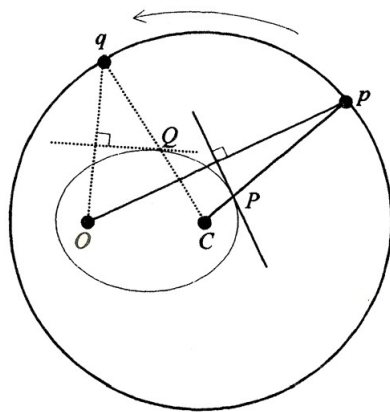


Nella figura a lato è riportato il confronto tra il diagramma dell'orbita e quello delle velocità, fondamentale per capire il passaggio alla costruzione dell'orbita partendo da quest'ultimo. La circon-



ferenza rappresenta il diagramma delle velocità per ogni orbita consentita dalle leggi di Newton e dalla forza di gravità, la forma dell'orbita dipenderà da dove si sceglie di posizionare l'origine delle velocità.

Scelta arbitrariamente l'origine in O e tracciata la velocità nel punto più vicino al Sole, in J , l'angolo θ tra l'origine della circonferenza e un punto qualsiasi P , nel diagramma delle velocità, corrisponde all'angolo θ dello spostamento di P da J nel diagramma dell'orbita, così come la direzione della tangente in P alla curva dell'orbita (nel diagramma dell'orbita) è



As p moves around the circle to q , the intersection of the construction moves from P to Q and so on, creating the orbit.

parallela alla linea che unisce O a P nel diagramma delle velocità.

Feynman quindi ruota di 90° il diagramma delle velocità in senso orario e considera in esso la perpendicolare bisettrice di OP , in modo che resti parallela alla tangente nel diagramma

dell'orbita in P (con riferimento alla figura precedente), per costruire quindi nel diagramma delle velocità un'orbita di misura arbitraria ma di forma corretta, al variare di P lungo la circonferenza del diagramma stesso.

Si ottiene in tal modo la stessa struttura geometrica della seconda figura di pagina quattro, quindi l'orbita descritta dal variare di P è proprio una ellisse! *Q.e.d.*

Impossibile non sorridere pensando all'espressione dell'arcigno Sir Isaac Newton qualora un Richard Feynman di fine diciassettesimo secolo gli avesse sottoposto questa 'semplice' dimostrazione, che a lui non era riuscita per niente bene.